

# Correction bac maths 2018 ES

## Exercice 1

Notions abordées : probabilités, loi normale, intervalle de fluctuation

### Partie A

$X$  est une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance  $\mu = 45$  et d'écart type  $\sigma = 12$ .

- 1a)  $P(X = 10) = 0$  car pour une loi à densité la probabilité que  $X$  prenne une valeur précise est nulle.
- b)  $P(X \geq 45) = 0.5$  car pour une loi normale on sait que  $P(X \geq \mu) = 0.5$ .
- c)  $P(21 \leq X \leq 69) = p(X - 2\sigma \leq X \leq X + 2\sigma) \approx 0.95$
- d)  $P(21 \leq X \leq 45) = P(45 \leq X \leq 69) = \frac{1}{2}P(21 \leq X \leq 69) \approx 0.475$

2) On utilise la calculette pour calculer  $p(30 \leq X \leq 60) \approx 0.789$

3) On cherche la valeur de  $a$  telle que  $P(X \leq a) = 0.3$ . On utilise la calculette, plus précisant la fonction inverse d'une loi normale et on obtient  $a = 39$ . Cela veut dire qu'il y a une probabilité de 30 pourcents que le client passe moins de 39 minutes dans le magasin.

### Partie B

1) Vérifions que l'on peut appliquer le théorème du cours sur les intervalles de fluctuations

- $n = 300 \geq 30$
- $np = 267 \geq 5$
- $n(1 - p) = 33 \geq 5$

On peut donc appliquer le théorème du cours qui nous dit qu'un intervalle de fluctuation à 95 pourcents est donné par :

$$I = \left[ p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

On en déduit que l'intervalle demandé est  $I \approx [0.854; 0.925]$

2) La fréquence de clients satisfaits est donnée par  $f = \frac{286}{300} \approx 0.95$

3) La fréquence trouvée à la question 2 n'appartient pas à l'intervalle trouvé à la question 1. Donc on ne peut pas affirmer que au seuil de 95 pourcents, le taux de satisfaction des clients est resté stable entre 2013 et 2018.

## Exercice 2

Notions abordées : probabilités, arbre de probabilités, analyse de fonctions

### Partie A

1) La probabilité  $p_{\overline{F}}(S)$  est la probabilité de l'événement S sachant  $\overline{F}$ . C'est donc la probabilité que l'élève soit inscrit dans un club de sport sachant que ce n'est pas une fille.

Réponse a.

2) On applique la formule du cours  $p_F(S) = \frac{p(F \cap S)}{p(F)} = \frac{0.3 \times 0.4}{0.47} = \frac{0.12}{0.47} \approx 0.255$

Réponse b

*Astuce* : La probabilité de l'intersection est donnée par l'arbre. Il suffit de regarder la branche qui passe par S et F et de faire le produit des probabilités présentes sur la branche

### Partie B

*Méthodologie* : L'équation de la tangente à une courbe au point a est donnée par l'équation  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

1) On a  $g(a) = -(1)^3 + 3 \times (1)^2 - 1 = -1 + 3 - 1 = 1$

g est dérivable sur son domaine de définition en tant que somme de fonctions dérivables sur cet intervalle.

$$g'(x) = -3x^2 + 6x$$

$$\text{Donc } g'(1) = 3$$

On en déduit que l'équation de la tangente est  $y = 3(x - 1) + 1 = 3x - 2$

Réponse b

2) *Méthodologie* : La valeur moyenne d'une fonction f sur un intervalle  $[a, b]$  est donné par  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

Une primitive de la fonction G est donnée par  $G(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - x$  La valeur moyenne d'une fonction est donnée par

$$\begin{aligned} m_a &= \frac{1}{a-(-1)} \int_{-1}^a g(x) dx \\ &= \frac{1}{a+1} (G(a) - G(-1)) \\ &= \frac{1}{a+1} \left( -\frac{a^4}{4} + a^3 + \frac{1}{4} \right) \end{aligned}$$

On évalue l'expression avec les valeurs de a proposées par l'énoncé et on trouve que cette expression vaut 0 pour  $a = 1$

Réponse b

## Exercice 3

1a) Le niveau au deuxième jour correspond à  $u_1 = 1.06u_0 - 15 = 626.3\text{cm}$ .

1b) Chaque jour il y a une augmentation de 6 pourcents cela revient à multiplier  $u_n$  par 1.06 puis il y a une baisse de 15 cm.

On peut donc en déduire que  $u_{n+1} = 1.06u_n - 15$ .

2)a) On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on définit  $v_n = u_n - 250$

*Méthodologie* : Pour montrer qu'une suite est géométrique on calcule  $v_{n+1}$  et on essaye de montrer qu'on peut écrire  $v_{n+1} = q * v_n$

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= u_{n+1} - 250 \\ &= 1.06u_n - 15 - 250 \\ &= 1.06u_n - 265 \\ &= 1.06(u_n - 250) \\ &= 1.06v_n\end{aligned}$$

$(v_n)$  est donc une suite géométrique de raison 1.06 et de premier terme  $v_0 = 355$

2b) *Méthodologie* : Si  $(u_n)$  est une suite géométrique de premier terme  $u_0$  et de raison  $q$  alors  $u_n = u_0q^n$

On a donc  $v_n = 355 * 1.06^n$

$$v_n = u_n - 250$$

$$\text{Donc } u_n - 250 = 355 * 1.06^n$$

$$\text{Donc } u_n = 355 * 1.06^n + 250$$

3a) Puisque  $1.06 > 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1.06^n = +\infty$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$$

3b) La suite  $(u_n)$  tend vers l'infinie et au départ le niveau de l'eau est inférieur à 10 mètres, il existe donc un jour où le niveau sera supérieur à 10 mètres et les techniciens devront intervenir.

4a) On cherche à calculer au bout de combien de jours le niveau sera supérieur à 10m. On rajoute donc les 2 instructions suivantes :

— tant que U < 1000

— u <- 1.06\*U-15

4b) On rentre le programme sur la calculette, on le lance et on obtient N=13.

4c) Les techniciens devront intervenir au bout de 13 jours c'est à dire le 14 janvier.

## Exercice 4

Notions abordées : étude de fonction

On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = (2x + 1)e^{-2x} + 3$

1)  $f$  est dérivable sur son domaine de définition en tant que somme et composée de fonctions dérivables.

$$\begin{aligned} \forall x \in [-2; 4], f'(x) &= 2e^{-2x} + (2x + 1) \times (-2)e^{-2x} \\ &= 2e^{-2x} - 4xe^{-2x} - 2e^{-2x} \\ &= -4xe^{-2x} \end{aligned}$$

2)  $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ .

On en déduit que  $f'(x) > 0$  sur  $]0; 4[$  donc  $f$  est croissante sur cet intervalle.

On en déduit que  $f'(x) < 0$  sur  $] - 2; 0[$  donc  $f$  est décroissante sur cet intervalle.

3)  $f$  est strictement décroissante sur l'intervalle  $] - 2, 0[$ .  $f(-2) \approx -161$  et  $f(2)4$ .

Donc d'après le théorème de la bijection il existe une unique solution à l'équation  $f(x) = 0$  sur cet intervalle.

A la calculatrice on trouve  $\alpha \approx 0.8$

4a) On admet que sur  $[-2; 4]$ ,  $f''(x) = (8x - 4)e^{-2x}$ .

$\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$ .

Donc le signe de  $f''$  dépend uniquement de l'expression entre parenthèse  $f''$  est négative sur  $[-2, 0.5]$ , s'annule en 0.5 et est positive sur  $[0.5; 4]$ .

4b) D'après la question précédente on en déduit que le plus grand intervalle sur lequel  $f$  est convexe est  $[0.5, 4]$ .

5a)  $G$  est dérivable sur  $[-2; 4]$ .

$$\begin{aligned} \forall x \in [-2; 4], G'(x) &= -e^{-2x} + (-x - 1) \times (-2)e^{-2x} \\ &= -e^{-2x} + 2xe^{-2x} + 2e^{-2x} \\ &= (2x + 1)e^{-2x} \\ &= g(x) \end{aligned}$$

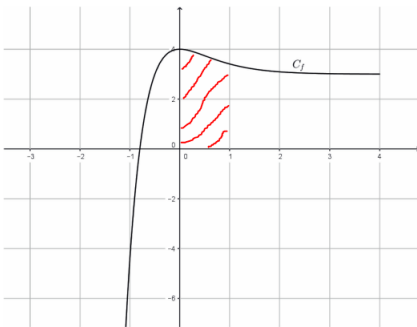
Donc  $G$  est bien une primitive de  $g$  sur cet intervalle.

5b) Puisque  $f(x) = g(x) + 3$  sur l'intervalle  $[-2; 4]$ , on en déduit qu'une primitive de  $f$  est  $F(x) = G(x) + 3x$

6a)

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

Exercice 4 – Commun à tous les candidats



6b) On peut lire  $3 < A < 4ua$ .

6c)

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 f(x) dx \\ &= F(1) - F(0) \\ &= -2e^{-2} + 3 + 1 \\ &= 4 - 2e^{-2} \\ &\approx 3,73 \text{ u.a} \end{aligned}$$